# L'ESFERA, AQUEST ÉSSER DESCONEGUT *

per

*MANUEL CASTELLET*

Fa 10 anys, tornant d'un col·loqui de geometria algèbrica, a Itàlia, on havíem assistit amb el Dr. Girbau i el Dr. Goñi, la meva esposa i jo vam passar uns dies de vacances a Suïssa i un vespre que plovia vam entrar per equivocació en un cinema on projectaven la pel·lícula «Meine Frau, diese unbekannte Wese» (La meva dona, aquest ésser desconegut). Malgrat l'opinió dels marits joves que crèiem conèixer-ho tot sobre la nostra muller, la pel·lícula oferia interessants aspectes de la psicologia femenina. Ja sé que la majoria dels assistents aquí no s'han casat amb cap esfera, però tot matemàtic, qui més, qui menys, hi conviu, amb l'esfera, i per això voldria, avui, parlar d'alguns aspectes geomètrics, potser no prou coneguts de tothom.

Parlar de l'esfera dóna, però, tema no per a una conferència, sinó per a tot un curs, i ja veieu que tenim un programa bastant atapeït que sols em concedeix 45 minuts i encara. Em limitaré, doncs, a comentar-ne només algunes propietats.

---

* Conferència feta per Manuel Castellet el 27-11-79 a la Societat Catalana de Ciències Físiques, Químiques i Matemàtiques.

Jo podria començar parlant de propietats mètriques de l'esfera, donant-ne la definició com el subespai de $R^3$ els punts del qual equidisten d'un de fixat, ja que no la puc definir com el conjunt de punts tals que el quocient de distàncies a dos de fixos és constant (el pla de simetria compleix també aquesta condició; el pla, que d'altra banda acompanya freqüentment l'esfera en propietats geomètriques). Però també podria definir-la com l'única superfície de segon grau totes les seccions planes i contorns de la qual són circumferències, que ens permet d'afirmar que la superfície de la terra és pràcticament una esfera, en observar la sombra en un eclipsi de lluna. O podríem parlar del fet que l'esfera té amplada constant (podem moure-la tangencialment entre dos plans paral·lels), bé que aquesta propietat no la caracteritza.

O podríem passar a propietats diferenciables de l'esfera i demostrar que tots els punts són umbilicals (és a dir, les dues curvatures principals coincideixen), propietat que la caracteritza entre les superfícies de curvatura no nul·la (si no, hem d'incloure-hi el pla), o passar a comentar que allò que els alemanys anomenen la «Brennfläche» de l'esfera es redueix a un punt, propietat que no compleix cap altra superfície diferenciable. La Brennfläche és la superfície descrita pels centres de curvatura de les seccions normals corresponents a les curvatures principals.

Podríem també estudiar les geodèsiques i demostrar que totes són tancades, o veure que d'entre els cossos d'igual superfície l'esfera té el mínim de les curvatures mitjanes, o que té curvatura mitjana constant (positiva), propietat que tenen moltes altres superfícies (les minimals tenen curvatura mitjana nul·la!), bé que l'esfera és l'única superfície diferenciable sense vora amb aquesta propietat. També té l'esfera curvatura de Gauss positiva constant, propietat que la caracteritza si ens restringim a superfícies sense vora.

Immersos ja en el món de les varietats diferenciables compactes sense vora és fàcil veure que la funció «altura» definida sobre l'esfera $S^n$ per $h(x_1, \ldots, x_n, x_{n-1}) = x_{n-1}$ és diferenciable i té dos punts crítics, els pols nord i sud. $S^n$ admet, doncs, una funció de Morse amb exactament dos punts crítics. Un teorema molt bonic de Reeb estableix precisament el recíproc: «Tota varietat n-dimensional compacta sense vora que admeti una funció de Morse amb exactament dos punts crítics és homeomorfa a l'esfera $S^n$» (No és cert, però, que una tal varietat sigui difeomorfa a $S^n$. De fet, Milnor va construir el 1956 7-varietats homeomorfes, però no difeomorfes, a $S^7$).

Bé, no acabaríem mai.

Però des del punt de vista d'un topòleg, les propietats més boniques de l'esfera són les estrictament topològiques, és a dir, les que es deriven del fet que tot punt de l'esfera té un entorn homeomorf a un disc obert del pla euclidià. Les esferes, no sols són boniques, sinó que a més a més llur estudi ha contribuït eficaçment al desenvolupament d'algunes branques de la topologia, per obra de molts dels millors matemàtics d'aquest segle.

Quan Leonhard Euler (a qui, per cert, els suïsos acaben d'honorar dedicant-li un bitllet de 10 Fr) es proposà a mitjan segle XVIII d'establir una classificació dels políedres mitjançant el nombre de cares i el de vèrtexs i explicà en carta adreçada a Christian Goldbach el 14-11-1750 que $v - a + c = 2$, no podia imaginar-se la importància que tindria la seva observació per al desenvolupament de la encara no nata topologia. Seria bonic de repassar la història del teorema d'Euler, des de la seva formulació i demostració inicials (ambdues falses), passant per les aportacions de Legendre i Cauchy, la fonamental de Simon Lhuilier el 1813 en descobrir que no era vàlida per a tots els cossos que aleshores es tenien per políedres, fins arribar a la formulació i demostració correctes de Christian von Standt el 1847 i la generalització a més dimensions de Ludwig Schläfli el 1850 en una memòria «Vielfache Continuität» que ultrapassa en valor científic bona part del que s'havia fet fins aleshores en el camp de la geometria multidimensional.

Aquest número $2 = v - a + c$, que es diu la característica d'Euler de l'esfera (o d'Euler-Poincaré, depèn del grau de germanofília del qui parli), es va veure més tard, de la mà d'Henri Poincaré, que era un invariant topològic de l'esfera. I encara més, és un invariant del tipus d'homotopia: és a dir no s'altera per deformacions contínues. Quan R. H. Brahama inicià el 1921 el teorema de classificació de les superfícies compactes, la característica d'Euler adquirí una significació especial: Tota superfície és topològicament equivalent a una esfera, a una suma convexa de tors o a una suma connexa de plans projectius, i l'orientabilitat o no, juntament amb la característica d'Euler, determina el tipus de superfície. Resultat: Tota superfície compacta de característica 2 és homeomorfa a l'esfera.

S'havien plantejat al final del segle passat i al començament d'aquest moltes preguntes relatives a l'esfera. Vaig a tractar-ne ací tres, en la resolució de les quals intervé essencialment el fet que la característica de l'esfera és, precisament 2.

*a*) Estudi de les singularitats d'un camp vectorial tangent sobre l'esfera (ben resolt).

*b*) Estudi del nombre mínim de colors que calen per a pintar un mapa sobre l'esfera (resolt, però potser no del tot satisfactòriament).

*c*) Criteri per a determinar si un espai topològic és una esfera (no resolt).

*a*) L'estudi de singularitats de camps vectorials tangents sobre una varietat fou iniciat per Luitzen Brouwer, el qual demostrà, mitjançant la introducció del concepte de grau d'una aplicació, que sobre l'esfera no hi ha cap camp tangent sense singularitats. El treball de Brouwer fou completat per Heinz Hopf l'any 1925 en demostrar que «la suma dels índexs de les singularitats d'un camp vectorial sobre una varietat compacta orientable, que només tingui un nombre finit de singularitats, és la característica d'Euler». Per tant, a l'esfera és 2.

La demostració d'aquest resultat és a les arrels de la topologia algèbrica, ja sigui seguint Hopf, projectant estereogràficament el camp sobre un equador que no contingui cap singularitat des del pol nord i des del pol sud, ja sigui utilitzant mètodes més sofisticats, com és ara l'ús dels grups d'homologia de l'esfera.

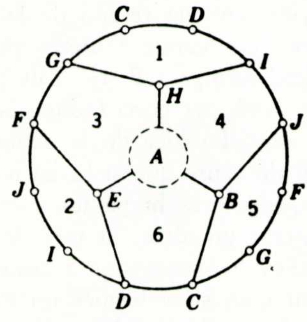
*b*) L'any 1852 Francis Guthrie, que s'acabava de doctorar al University College de Londres, tot pintant un mapa d'Anglaterra va veure que n'hi havia prou amb 4 colors, però debades intentà de demostrar-ho. Ho comunicà al seu germà, Frederick, deixeble d'Augustus De Morgan i el problema restà enterrat fins que, l'any 1878, Arthur Cayley, en una reunió de la London Mathematical Society, féu reviure l'interès pel tema. Al cap d'un any, Alfred Kempe i P. G. Tait publicaren una demostració que passà per bona (àdhuc per a Klein) durant més de 10 anys. La idea de la demostració era la següent: És fàcil de veure que si hi ha un mapa que necessita 5 colors, aleshores hi ha un mapa normal (un país no pot contenir un altre, ni més de 3 països es tallen en un vèrtex) que necessita 5 colors. També hom veu fàcilment que, si hi hagués un mapa normal que necessités 5 colors, n'hi hauria un de minimal, amb aquesta propietat. Tot es reduïa, doncs, a provar que no existia cap mapa normal minimal que necessités 5 colors. Kempe i Tait demostraren primer que tot mapa normal conté un país amb 5 o menys veïns. Aleshores demostraren que això no podia passar en un mapa normal minimal que necessités 5 colors. Però la demostració fallava en el cas d'un país amb exactament 5 veïns. La resolució d'aquest punt ha portat quasi 100 anys.

Fou Percy John Heawood qui trobà el 1890 un mapa de 18 països en el qual no valia la demostració de Kempe. Heawood generalitzà el problema i estudià mapes sobre superfícies compactes arbitràries. Demostrà:

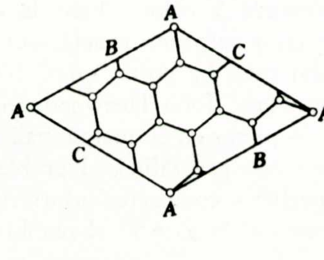
Teorema: Si $\chi \neq 2$, el nombre màxim de colors que es necessiten és $[N]$ on $N = \dfrac{7 + \sqrt{(49 - 24\chi)}}{2}$.

La demostració és elemental, per inducció sobre el nombre de cares del mapa i no passa d'ésser un exercici per als alumnes de 2n. o 3r. curs de la llicenciatura, igual

com demostrem que tota triangulació d'una superfície de característica $\chi$ té com a mínim N vèrtexs.
Per a $\chi = 1$, la superfície és el pla projectiu i es fàcil construir un mapa que necessiti exactament $[N] = 6$ colors.




Per a $\chi = 0$, la superfície és un tor si és orientable, o una ampolla de Klein en cas contrari.
Sobre el tor és fàcil de construir un mapa que necessiti exactament $[N] = 7$ colors.




En canvi Ringel demostrà l'any 1959 que tot mapa sobre l'ampolla de Klein es pot pintar amb 6 colors, però que tot mapa sobre qualsevol altra superfície de característica $\chi \neq 2$ en necessita $[N]$. Aquest resultat és degut a Ringel i Woungs i és de l'any 1968.

Bé, però, què ha passat, mentre, amb l'esfera? La fórmula de Heawood, la demostració de la qual no val si $\chi = 2$, dóna sorprenentment el resultat desitjat per a l'esfera: $[N] = 4$. Durant tot aquest segle es desenvolupa la topologia combinatorial i l'estudi de grafos i es sistematitza l'ús de l'ordenador per a resoldre problemes de grafos. L'any 1976, Kenneth Appel i Wolfgang Haken, de la Universitat de Michigan, anuncien que han resolt el problema dels 4 colors, analitzant els possibles casos mitjançant un programa d'ordenador molt elaborat i llarg. El treball ha estat publicat a l'Illinois Journal of Mathematics de l'any 1977. Jo, amb perdó d'alguns matemàtics aplicats, desitjo de tot cor que es trobi una demostració teorètica del teorema dels 4 colors.

*c*) Tota superfície 1-connexa és homeomorfa a l'esfera. Si sortim del camp de les superfícies, ens podem preguntar condicions per tal que un espai sigui homeomorf a l'esfera. Tractar amb espais que no admetin una estructura de políedre o quelcom semblant és quasi inaccessible, i buscar condicions d'homeomorfisme, també. Per això els topòlegs es restringeixen usualment a la categoria dels CW-complexos, espais que a cada nivell es poden obtenir adjuntant cel·les al nivell anterior i es contenten a estudiar quan dos CW-complexos poden ésser del mateix tipus d'homotopia. La consideració de $\pi_1(X) = [S^1, X]$ ja no és suficient, i convé fer ús dels grups d'homotopia $\pi_n(X)$ introduïts per Cech, sense massa fortuna, i per Hurewicz al Congrés de Topologia de Zurich del 1935. *Grosso modo,*

$$\pi_n(X) = [S^n, X]$$

És immediat que, si $f\colon X \to Y$ és una equivalència homotòpica, aleshores f indueix isomorfisme entre els grups d'homotopia. El recíproc no sols no és immediat sinó que no és cert. De tota manera, tenim el famós teorema de J. H. C. Whithehead que afirma que, en la categoria dels CW-complexos, si f: $X \to Y$ indueix $f_*$: $\pi_n X \cong \pi_n Y$ $\forall_n$, aleshores f és una equivalència homotòpica. Què es pot dir, però de $\pi_n(S^2)$?

Els grups d'homotopia d'un espai són molt menys tractables que els d'homologia en no valdre-hi l'axioma d'escissió, o equivalentment el teorema de la suspensió $H_n(X) \cong H_{n+1}(SX)$ o equivalentment la successió exacta de Mayer-Vietoris. Espais amb homologia complicada (per ex. $RP^{\infty}$), tenen homotopia senzilla ($\mathbf{Z}/2$, 0...0), i recíprocament. Els grups d'homologia de $S^2$ son $\mathbf{Z}$, 0, $\mathbf{Z}$, 0..., i això ho sap calcular qualsevol estudiant que porti un parell de setmanes aprenent homologia, mentre que en necessitarà moltes més per a calcular els grups d'homotopia de $S^2$. I tantes com en necessitarà!

De primer, veurà (ja ho sap) que $\pi_1(S^2) = 0$. Després observarà que $\pi_2(S^2) \cong \mathbf{Z}$, com a conseqüència del teorema del grau de Brouwer, segons el qual f, g: $S^2 \to S^2$ $f \simeq g \Leftrightarrow f_* = g_*$: $H_2(S^2) \to H_2(S^2)$.

La tercera cosa que aprendrà el nostre estudiant és que $\pi_3(S^2) \cong \mathbf{Z}$, ja que $\pi_3(S^2) \cong \pi_3(S^3) \cong \mathbf{Z}$ com a conseqüència de la fibració de Hopf ($S^1 \to$ )$S^3 \to S^2 = \mathbf{C}P^1$ i la successió exacta d'homotopia associada a una fibració.

$$\pi_i(S^1) \to \pi_i(S^3) \to \pi_i(S^2) \to \pi_{i-1}(S^1) \to \ldots$$

d'on resulta $\pi_i(S^2) \cong \pi_i(S^3)$ $\forall_i \geqslant 3$.

El càlcul dels grups d'homotopia de $S^2$ empren a partir del $\pi_3$ dos camins diferents. L'un, a obtenir resultats locals concrets (determinar $\pi_4$, $\pi_5$, ...); l'altre, a obtenir resultats globals parcials (la torsió de $\pi_i$ $\forall_i$, ...).

Les tècniques emprades tant en un camí com en l'altre se sofistiquen cada vegada més.

El teorema de la suspensió de Freudenthal, la successió espectral de Serre, la successió espectral d'Adams, els mètodes de composició de Toda, el producte de Whitehead..., són les eines emprades per a obtenir resultats locals concrets. Enumeraré els 10 primers grups d'homotopia de $S^2$, bé que avui dia hom ja en coneix molts més: (l'any passat, 29!).

$$\begin{array}{rl}
1 & — 0 \\
2 & — \mathbf{Z} \\
3 & — \mathbf{Z} \\
4 & — \mathbf{Z}_2 \\
5 & — \mathbf{Z}_2 \\
6 & — \mathbf{Z}_{12} = \mathbf{Z}_4 \oplus \mathbf{Z}_3 \\
7 & — \mathbf{Z}_2 \\
8 & — \mathbf{Z}_2 \\
9 & — \mathbf{Z}_3 \\
10 & — \mathbf{Z}_{15}
\end{array}$$

Una de les eines més útils en el camp global ha estat la descomposició de Postnikov d'un espai

$$\begin{tikzcd} & & X \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[drr] \arrow[drrr] & & & \\ X^n \arrow[r] & X^{n-1} \arrow[r] & X^{n-2} \arrow[r] & \dots & X^1 \arrow[r] & * \end{tikzcd}$$

tal que cada $X^n \to X^{n-1}$ indueix isomorfisme entre els $\pi_i$ $i \leqslant n$, $\pi_j(X^n) = 0$ $\forall_j > n$ i cada $X^n \to X^{n-1}$ és una fibració de fibra un $K[\pi_n(S^2), n]$.

Per exemple, per a $X = S^2$, $X^2 = \mathbf{CP}^{\infty} = K(\mathbf{Z}, 2)$.

Mitjançant l'ús d'una descomposició de Postnikov, no és difícil demostrar que

$$\pi_i(S^2) \quad i > 3 \text{ és finit } \forall_i$$

En aquest sentit, el resultat global més fort obtingut fins ara és degut a James, d'un costat (1960), i Selick, d'un altre (1979).

James demostrà que tot element de la component 2-primària de $\pi_i(S^2)$ té ordre 2 o 4; és a dir, només poden aparèixer $\mathbf{Z}_2$, $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$ o $\mathbf{Z}_4$, però no $\mathbf{Z}_8$... Selick, en un treball publicat a *Topology,* 1978, demostra que per a tot p primer $p \neq 2$, tot element de la component p-primària de $\pi_i(S^2)$ $i > 3$ té ordre p. És a dir, només poden aparèixer $\mathbf{Z}_p$, però no $\mathbf{Z}_{p2}$.

Bé, des del punt de vista d'un topòleg, l'esfera és un espai gairebé desconegut!

Ara bé, si és bastant cert que molts geòmetres passen a la topologia, per necessitats de l'ofici, no ho és menys que molts topòlegs passen, també per necessitats de l'ofici, a l'àlgebra. I jo em pregunto: Què és, en el context de l'àlgebra d'un topòleg, l'esfera $S^2$? ¿Què és, més concretament, en la teoria de grups, l'esfera $S^2$? Vaig a respondre'm a aquesta pregunta, i acabo.

Donat un grup, hi ha una única manera d'associar-li un CW-complex de dimensió 2 simplement connex, de tal manera que homològicament el grup i el CW-complex estiguin íntimament lligats.

Sigui G un grup; aleshores existeix, llevat d'homotopies, un únic W-complex d'Eilenberg-MacLane $X = K(G, 1)$ ($\pi_1\ X = G$, $\pi_i\ X = 0$ $i > 1$). Per exemple, si $G = \mathbf{Z}$, $K(\mathbf{Z}, 1) = S^1$, si $G = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, $K(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, 1) = \mathbf{R}P^{\infty}$.

El 2-esquelet d'aquest $K(G, 1)$ és un CW-complex de dimensió 2, amb grup fonamental G i grups d'homotopia superior $\neq 0$ en general. Per exemple, $K(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}, 1) = \mathbf{R}P^2$.

L'espai recobridor universal d'aquest $K(G, 1)^2$ és un CW-complex de dimensió 2 simplement connex.

Així, si $G = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ $K(G, 1)^2 = S^2$.

Des del punt de vista d'un topòleg que fica el nas a l'àlgebra, l'esfera $S^2$ és el grup $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$. Això permet d'estudiar topològicament propietats homològiques del grup G (o més generalment d'un sistema binari, ja que l'estructura de grup no cal per a res), i introduir els grups d'homotopia de G com els de $K(G, 1)^2$.

Així resulta que el sistema binari G és un grup si i només si $\pi_1 G = G$ (fa el paper de l'associativitzat de G) i l'estudi dels grups $\pi_i$ G $i > 2$ dóna (més ben dit, pot donar, ja que tot just ha estat iniciat) informació sobre el grup G.